МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Вятская государственная сельскохозяйственная академия»

Кафедра математики

О.В. Черник

Контрольная тетрадь

по математическому анализу

Учебное пособие

КИРОВ 2012

УДК 517.2

ББК 22.161.11

Черник О.В. Контрольная тетрадь по математическому анализу: Учебное пособие для студентов направления 080100 «Экономика» профилей «Аграрная экономика», «Маркетинг», «Бухгалтерский учет», «Налоги и налогообложение» – Киров: Вятская ГСХА, 2012. – 42 с.

Рецензенты: доцент кафедры математики ВГСХА, кандидат физико-математических наук Фарафонов В.Г.;

доцент кафедры математического моделирования в экономике ВГУ, кандидат физико-математических наук Ковязина Е.М.

Учебное пособие рассмотрено и утверждено методической комиссией инженерного факультета Вятской государственной сельскохозяйственной академии (протокол № от .12).

Контрольная тетрадь содержит задания контрольной работы по математическому анализу, решение нулевого варианта, экзаменационную программу, список литературы. Учебное пособие предназначено для студентов направления 080100 «Экономика» профилей «Аграрная экономика», «Маркетинг», «Бухгалтерский учет», «Налоги и налогообложение» заочной формы обучения. Кроме того, данное пособие может быть использовано студентами очной формы обучения в процессе самостоятельной работы при подготовке к экзамену и зачету по математическому анализу.

Программа учебной дисциплины «Математический анализ» математического цикла (базовая часть) разработана в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 080100 Экономика (квалификация (степень) «бакалавр»), утвержденным Министерством образования и науки Российской Федерации от 21.02.2009 № 747 (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 25.02.2010 №16500) и примерным учебным планом; отрецензирована экспертами Учебно-методического объединения вузов России по образованию в области финансов, учета и мировой экономики; рассмотрена на заседаниях учебно-методических советов и секций УМО.

Цели и задачи освоения дисциплины

Получение базовых знаний и формирование основных навыков по математическому анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической экономической деятельности.

Развитие понятийной математической базы и формирование определенного уровня математической подготовки, необходимых для решения теоретических и прикладных задач экономики и их количественного и качественного анализа.

В результате изучения дисциплины «Математический анализ» студенты должны:

- владеть основными понятиями дисциплины;

- иметь навыки работы со специальной математической литературой;

- уметь решать типовые задачи, уметь использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач экономики;

- уметь содержательно интерпретировать получаемые количественные результаты.

Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Математический анализ» является базовой дисциплиной математического цикла федерального государственного образовательного стандарта профессионального образования (ФГОС ВПО) по направлению 080100.62 «Экономика» (квалификация – «бакалавр»).

Изучение дисциплины «Математический анализ» основывается на базе знаний, умений и компетенций, полученных студентами в ходе освоения курса «Алгебра и начала анализа», а также дисциплины «Линейная алгебра».

Дисциплина «Математический анализ» является базовым теоретическим и практическим основанием для всех последующих математических и финансово-экономических дисциплин подготовки бакалавра экономики.

Требования к результатам освоения дисциплины

В совокупности с другими дисциплинами базовой части ФГОС ВПО дисциплина «Математический анализ» направлена на формирование следующих общекультурных (ОК) и профессиональных (ПК) компетенций бакалавра экономики:

- владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК1);

- способен собирать и анализировать исходные данные, необходимые для расчёта экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК1);

- способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитывать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов (ПК2);

- способен выполнять расчёты,, необходимые для составления экономических разделов планов. Обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК3):

- **с**пособен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК4);

- способен выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчётов и обосновывать полученные выводы (ПК5).

В результате освоения содержания дисциплины «Математический анализ» студент должен:

- знать основы математического анализа, необходимые для решения физических и экономических задач;

- уметь применять математические методы для решения экономических задач;

- владеть навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач, методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов (в части компетенций, соответствующих методам математического анализа).

Содержание разделов дисциплины

Раздел 1. Введение анализ: множества, функции

1.1 Числовые множества. Действительные числа. Основные понятия. Числовые промежутки. Окрестность точки. Числовые функции. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции. Сложная и обратная функции.

1.2. Свойства функций: чётность и нечётность, монотонность, периодичность, ограниченность. Элементарные функции. Степенная, показательная и логарифмические функции. Тригонометрические функции и обратные к ним.

Раздел 2. Предел и непрерывность

2.1. Числовые последовательности. Способы задания последовательностей. Прогрессии. Формула сложных процентов. Предел числовой последовательности. Теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. Число е.

2.2. Предел функции. Различные типы пределов: односторонние пределы, пределы в бесконечности, бесконечные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Основные свойства пределов. Сравнение бесконечно малых функций, эквивалентные бесконечно малые функции. Первый и второй замечательные пределы.

2.3. Непрерывность функции в точке. Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Теорема о сохранении знака непрерывной функции. Точки разрыва функции, их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Равномерная непрерывность. Паутинные модели рынка.

Раздел 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

3.1. Производная функции. Дифференцируемость функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций.

3.2. Дифференциал функции. Геометрический смысл производной и дифференциала функции. Уравнение касательной к графику функции. Дифференцирование неявно заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные и дифференциалы высших порядков.

3.3. Предельные величины в экономике. Эластичность функции, её свойства и геометрический смысл. Задача о распределении налогового бремени. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора для многочлена и для произвольной функции.

3.4. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Признак монотонности функции на интервале. Локальный экстремум функции, достаточные условия локального экстремума.

3.5. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения её графика. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Раздел 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

4.1. Первообразная и неопределённый интеграл. Таблица неопределённых интегралов. Свойства неопределённого интеграла. Замена переменной в неопределённом интеграле, интегрирование по частям.

4.2. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых классов иррациональных и трансцендентных функций.

4.3. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл и его свойства. Интегрируемость непрерывной функции. Аддитивность определенного интеграла. Теорема о среднем.

4.4. Интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определённом интеграле, интегрирование по частям.

4.5. Геометрические приложения определённого интеграла: вычисление площади криволинейной трапеции и объёма тела вращения.

4.6. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Приближённое вычисление определённых интегралов. Формулы прямоугольников и Симпсона.

Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

5.1. Функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня. Элементарные функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Свойства функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве: ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений.

5.2. Частные производные, дифференцируемость, дифференциал функции нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная сложной функции. Производная по направлению, градиент. Свойства градиента.

5.3. Эластичность функции нескольких переменных. Однородные функции нескольких переменных. Формула Эйлера. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.

5.4. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия существования локального экстремума. Условный экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

Раздел 6. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

6.1. Кратные интегралы, их свойства. Геометрический смысл двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Формула замены переменной в двойном интеграле. Использование полярных координат для вычисления двойных интегралов.

Раздел 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

7.1. Дифференциальные уравнения n-ого порядка, основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка, нормальная форма. Поле направлений, интегральные кривые. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнений первого порядка в нормальной форме. Общее и частное решение уравнений. Общий интеграл. Особые решения.

7.2. Некоторые типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах, линейные, Бернулли. Автономные уравнения и их свойства.

7.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения. Общее решение. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Построение частного решения неоднородного уравнения с правой частью специального вида методом неопределенных коэффициентов.

7.4. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия. Интегрирование нормальных систем. Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

7.5. Задачи экономической динамики, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Раздел 8. Числовые и степенные ряды

8.1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости. Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши.

8.2. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Условно сходящиеся ряды.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенного ряда на интервале сходимости.

8.3. Ряд Маклорена. Достаточные условия разложимости функции в ряд Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Некоторые приложения степенных рядов. Нахождение приближённых значений функций. Вычисление приближённых значений определённых интегралов. Приближённое решение дифференциальных уравнений.

Общие методические указания к оформлению контрольной работы

Контрольная работа по математическому анализу состоит из 10 заданий по 20 вариантов в каждом задании. Номер варианта (1–20) определяется двумя последними цифрами зачетной книжки студента, если эти цифры образуют число от 01 до 20. Если число больше 20, то из него следует вычесть число, кратное 20 (20,40,60 или 80) для попадания в отрезок 1–20.

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1) перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса по рекомендованным учебным пособиям;

2) контрольную работу следует выполнить в отдельной тетради в клетку, на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия и инициалы студента, номер зачетной книжки, номер контрольной работы, название дисциплины, дата отправки работы в академию, домашний адрес студента, фамилия и инициалы преподавателя, ведущего дисциплину;

3) контрольные задания следует располагать по порядку, начиная с первого. Перед решением каждой задачи необходимо полностью переписать ее условие;

4) решение задачи следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул и теорем;

5) при решении задач, связанных с построением графиков функций, чертежи должны быть выполнены аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Обозначения на чертежах должны соответствовать объяснениям в ходе решения задачи;

6) на каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 2-3 см для замечаний преподавателя;

7) контрольная должна быть выполнена самостоятельно. Если преподаватель установит несамостоятельность выполнения работы, то она не будет зачтена;

8) если в процессе изучения теоретического материала или при решении задач у студента возникают трудности, то он может обратиться к преподавателю, ведущему дисциплину, за консультацией;

9) получив прорецензированную работу (как зачтенную, так и незачтенную), студенту следует исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, учесть его рекомендации и советы. В случае незачета по контрольной работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу;

10) зачтенная контрольная работа предъявляется студентом при сдаче экзамена.

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

I. Найти указанные пределы:

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-x^2}{4x^2-5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} tg 2x\, ctg 4x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x+2}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{arctg 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{-1+2x}\right)^{3x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{6x-4}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 5x}{tg 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{2x-1}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+3}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5-x+2}{2x^5+3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3+x}{x}}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{6x^2-16x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{-2x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-x-1}{4x^6+4x^5-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x-2}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{\sqrt{x-2}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{6}{x}}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-3x^2+2x}{x^6+4x^5-6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-14x+12}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3x-2}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-5x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-3x^2+5x}{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{5x}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^4+5x^2-2}{3x^4-4x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tgx}{1-\cos 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-3x}{-1-3x}\right)^{2-x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+9}{x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18}{x^2-6x+9}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{7-x}{x}}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+2}{2x^2+3x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{7}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{4x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{-5+x}\right)^{\frac{2x+1}{3}}$

20. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{3x^2+4x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x^2+9}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^2 2x}{x\sin 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{5+3x}{8x}}$.

II. Дана функция $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Требуется: а) исследовать на непрерывность функцию; б) если функция имеет в какой-либо точке разрыв, определить род разрыва; в) сделать эскиз графика функции.

Вариант	a	b	c	d	Вариант	a	b	c	d
1	-1	4	1	-2	11	-2	5	2	-7
2	1	-4	-1	2	12	2	-8	-2	4
3	-1	6	1	-3	13	-2	7	2	-5
4	1	-6	-1	3	14	2	-1	-2	1
5	-1	8	1	-4	15	-2	0	2	13
6	1	-8	-1	4	16	2	-4	-2	-6
7	-1	10	1	-5	17	-2	11	2	-1
8	1	3	-1	6	18	2	5	-2	7
9	-1	-3	1	-6	19	-2	-6	2	-9
10	1	14	-1	7	20	2	9	-2	11

III. Найти производные функций:

1. а) $y = \dfrac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; б) $y = 4^{\sin 5x} - \cos^2 x$; в) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{2-x^2}{x^3-6x}}$;

   г) $y = (2x+3)^{tgx}$; д) $x^3y^3 - 2xy + 3 = 0$.

2. а) $y = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^3-6x-9}}$; б) $y = 2^{arctgx} + \ln(1+x^2)$; в) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}}$;

   г) $y = (1+\cos x)^{x^3}$; д) $x^2y^2 - \cos x = 0$.

3. а) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}$; б) $y=3^{\cos 3x}+\sin^2 3x$; в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^3+9x}}$;

г) $y=\left(x^3+2\right)^{\sin x}$; д) $\cos(xy)-2x=0$.

4. а) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{x^3-4x^2+1}}$; б) $y=2^{\arcsin x}+\arccos^3 x$; в) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-2}{x^3-3x}}$;

г) $y=\left(x^2+1\right)^{arctgx}$; д) $\dfrac{x}{y}+xy-2=0$.

5. а) $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$; б) $y=5^{tg 2x}-(x+1)^2$; в) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2+4}{x^3+12x}}$;

г) $y=(\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$; д) $5x^2y^2-7y+4=0$.

6. а) $y=\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2-16x-2}}$; б) $y=4^{tg\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x+2}$; в) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3-x^2}{x^3-9x}}$;

г) $y=(x+\sin x)^{x^3}$; д) $x^3y^3-2xy+1=0$.

7. а) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}}$; б) $y=3^{arctg 2x}-\ln(1+4x^2)$; в) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{4-3x^2}{x^3-4x}}$;

г) $y=(tg 2x)^{tg 2x}$; д) $x^2+xy+y^2=3$.

8. а) $y=\dfrac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-4}}$; б) $y=2^{\cos^3 x}+\sin^2 x$; в) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{5-x^2}{x^3-15x}}$;

г) $y=(x+1)^{\arcsin\sqrt{x}}$; д) $x^2+y^2-xy=0$.

9. а) $y=\dfrac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}$; б) $y=4^{\arccos 2x}-\sqrt[4]{1-4x^2}$; в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^3-3x}}$;

г) $y=(\sin 2x)^{tg 2x}$; д) $x^3+y^3-3xy=0$.

10. а) $y=\dfrac{x^3-10}{\sqrt{x^4-8x}}$; б) $y=6^{arcctg 3x}+arcctg 3x$; в) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{10-3x^2}{x^3-10x}}$;

г) $y=(x+\ln x)^{\frac{1}{x}}$; д) $x^4+y^4=x^2y^2$.

11. а) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^3}}$; б) $y=e^{\cos 4x}+\arccos\sqrt{x}$; в) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1-4x^2}{x^3-5x}}$;

г) $y=\left(x+2x^2\right)^{1-x}$; д) $x^2\sin 2y-y^2\cos 2x=10$.

12. а) $y=\dfrac{2x^4+8x^2-1}{\sqrt{6x^2+4x-3}}$; б) $y=4^{\sqrt{3x-1}}+\ln(\cos x)$; в) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{7x^2-2}{4x^3+x}}$;

г) $y=(\sin 3x)^{\frac{2}{x}}$; д) $x\cdot tgy-2x^2+3y^2=4$.

13. а) $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2-2}}$; б) $y=6^{\ln 3x}+(tgx+4)^2$; в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{9-x^2}{2x^3+2x}}$;

г) $y=(tg3x)^{x^3}$; д) $y^3-x^2=arctg\dfrac{x}{y}$.

14. а) $y=\dfrac{7x^5-12}{\sqrt{4x^2-2x+9}}$; б) $y=2^{\arccos 2x}+\sqrt[3]{3x-5}$; в) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{4-x}{2-3x^3}}$;

г) $y=x^{\frac{x}{3}}$; д) $y^2=x^2+x\cdot\cos^2 y$.

15. а) $y=\dfrac{3+x^3}{\sqrt{16x^2-1}}$; б) $y=3^{arctgx}+\sqrt[4]{ctgx}$; в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x^3}{4-9x}}$; г) $y=(tg4x)^{\sqrt{x}}$;

д) $\ln(x^2+y^2)+arctg\dfrac{x^2}{y}=0$.

16. а) $y=\dfrac{4+x}{\sqrt{x^2-3x}}$; б) $y=e^{\cos 4x}+\ln^2(x+1)$; в) $y=\ln\sqrt[3]{(2x-3)(3-x^2)}$;

г) $y=(\sin 3x)^{\sqrt{2x}}$; д) $e^{2y^2}-e^{-3x}+\dfrac{y}{x^2}=1$.

17. а) $y=\dfrac{6x^3-1}{\sqrt{9x^2+8}}$; б) $y=9^{x^3+4}+\sin^2 7x$; в) $y=\ln\sqrt[4]{(3x+1)(6-2x^2)}$;

г) $y=\left(\sqrt{x-1}\right)^{tg2x}$; д) $3^{y^2}-x\cdot y^3\ln 3=15$.

18. а) $y=\dfrac{x^4-2x}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $y=5^{\ln x^3}-\sqrt{x-\ln 5}$; в) $y=\ln\sqrt{(x^3+6)(x^2-6)}$;

г) $y=(\arcsin x)^{4x}$; д) $e^{y^2}+x^2\cdot e^{-y}=2x^2$.

19. а) $y=\dfrac{5x^3+2}{\sqrt{4x^2+x-3}}$; б) $y=4^{\sin x^3}-\sqrt{\ln x}$; в) $y=\ln\sqrt[5]{(x+7)(3x^2+8)}$;

г) $y=(arctg4x)^{x^2}$; д) $y^3=4x^2+x\cdot\sin^2 y$.

20. а) $y=\dfrac{x^4+x^3}{\sqrt{x^2+5x}}$; б) $y=3^{x^3-1}-\arccos\sqrt{2x-4}$; в) $y=\ln\sqrt{(3x+5)(x^2-6)}$;

г) $y=(tg4x)^{\sin x}$; д) $4y-x^3=arcctg\dfrac{x}{y}$.

IV. Исследовать функцию $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+d}$ и построить ее график.

Вариант	a	b	c	d	Вариант	a	b	c	d
1	1	4	1	0	11	2	1	2	0
2	1	0	16	1	12	0	2	0	4
3	0	3	0	1	13	1	0	9	3
4	-1	0	3	2	14	4	0	0	-16
5	5	0	0	-25	15	-1	0	4	1
6	2	1	-1	0	16	3	0	-1	2
7	-1	0	5	3	17	0	6	0	1
8	0	5	0	1	18	3	0	0	-9
9	2	0	0	-4	19	1	4	2	0
10	-1	2	2	0	20	4	0	3	1

V. Исследовать функцию на экстремум:

1. $z=\sqrt{x}\sqrt[4]{y}-2x-y$;

2. $z=\sqrt[3]{x}\sqrt{y}-2x-3y$;

3. $z=3x+3y-x^2-xy-y^2+6$;

4. $z=7x+8y-x^2-xy-y^2-10$;

5. $z=-2x-3y+x^2+xy+y^2$;

6. $z=-4x-5y+x^2+xy+y^2$;

7. $z=-2x-6y-x^2+xy+y^2$;

8. $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$;

9. $z=8x-4y+x^2-xy+y^2+15$;

10. $z=x^2+y^2-6x-8y+12$;

11. $z=2x-8y-x^2-y^2-9$;

12. $z=-3x-6y+x^2+xy+y^2$;

13. $z=-2x-y+x^2+xy+y^2$;

14. $z=-15x-12y+x^3+3xy^2$;

15. $z=x^2+2y^2-2x+1$;

16. $z=1-2x+x^2-2y^2$;

17. $z=6x^3y^2-x^4y^2+x^3y^3$ $(x>0,\ y>0)$;

18. $z=x^2+y^2+\dfrac{(x+2y-16)^2}{5}$;

19. $z=x^2y+xy^2+xy$;

20. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

VI. Найти указанные неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1. а) $\int 2e^{x^2-2}xdx$, б) $\int \dfrac{3x^3}{x^2-x-4}dx$, в) $\int x\sin 3xdx$;

2. а) $\int \dfrac{x^2dx}{4\sqrt{5-x^3}}$, б) $\int \dfrac{3x^3-3}{x^2-2x-1}dx$, в) $\int \ln(x-2)dx$;

3. а) $\int \dfrac{\sin 2xdx}{\sqrt{7-\sin^2 x}}$, б) $\int \dfrac{1-x^3}{x^2+x+3}dx$, в) $\int xe^{2x}dx$;

4. а) $\int \dfrac{x^3}{x^8+4}dx$, б) $\int \dfrac{x^4+8}{x^2+3x-4}dx$, в) $\int \arcsin xdx$;

5. а) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x+5}}$, б) $\int \dfrac{2x^4+8x-2}{2x^2+3x-4}dx$, в) $\int 3x^2\ln xdx$;

6. а) $\int \sin^2 x\cos xdx$, б) $\int \dfrac{3x^3-3}{x^2-2x-1}dx$, в) $\int \arcsin xdx$;

7. а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{5-x^6}}$, б) $\int \frac{8+3x^3}{3-x^2-2x}dx$, в) $\int 6x\cos\frac{x}{2}dx$;

8. а) $\int \frac{x^3}{x^8+4}dx$, б) $\int \frac{8+3x^3}{3-x^2-2x}dx$, в) $\int \arcsin 4xdx$;

9. а) $\int \sin x\sqrt{\cos x}dx$, б) $\int \frac{x^3+2}{x^2+2x+4}dx$, в) $\int x^3\ln 3xdx$;

10. а) $\int \frac{5x^4dx}{\sqrt{5-x^{10}}}$, б) $\int \frac{x^3+2}{x^2+2x+4}dx$, в) $\int \arcsin xdx$;

11. а) $\int tgxdx$, б) $\int \frac{x^2+2}{1+4x-2x^2}dx$, в) $\int xarctgxdx$;

12. а) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$, б) $\int \frac{3x^4+2x-1}{6+x+x^2}dx$, в) $\int (x+1)e^{3x}dx$;

13. а) $\int \frac{arctg^2x}{x^2+1}dx$, б) $\int \frac{x^4+2x^3-x}{6-2x+x^2}dx$, в) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}dx$;

14. а) $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$, б) $\int \frac{x^2+2x^3-5x}{4-2x^2+x}dx$, в) $\int x\sin\frac{x}{2}dx$;

15. а) $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}dx$, б) $\int \frac{x^4-2x+4}{4-x-x^2}dx$, в) $\int \ln(x^2+1)dx$;

16. а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$, б) $\int \frac{8+x^3}{7-x^2-3x}dx$, в) $\int e^{2x}(2x-1)dx$;

17. а) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, б) $\int \frac{x^2+2x-5}{6-x^2+x}dx$, в) $\int (3+4x)\sin 3xdx$;

18. а) $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$, б) $\int \frac{5x^2+x-1}{2-x+x^2}dx$, в) $\int arctg2xdx$;

19. а) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, б) $\int \frac{3x^3+1}{2x^2+2x+4}dx$, в) $\int 3x\,4^x dx$;

20. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$, б) $\int \frac{3x^4+x^3-x}{5-2x+x^2}dx$, в) $\int \arcsin 4xdx$.

VII. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

1. $y = 2 - x^2;\ y = x;\ x = 0$;

2. $y = x^2 - 3x;\ 3x + y - 4 = 0;\ y = 0$;

3. $y = 3 - x^2;\ y = x^2 + 1$;

4. $y = \frac{2}{x};\ y = x + 1;\ x = 3$;

5. $x + y = 0;\ y = 2x - x^2$;

6. $y = e^{-x};\ y = 0;\ x = 0;\ x = 1$;

7. $y^2 = 4x;\ x = 4$;

8. $y = x^3;\ y = 2x$;

9. $y = \ln x;\ y = 0;\ x = e$;

10. $y^3 = x;\ y = 1;\ x = 8$;

11. $y^2 = 9x;\ x^2 = 9y$;

12. $y = 3 - 2x;\ y = x^2$;

13. $y = x^2;\ y = \frac{x^2}{2};\ y = 2x$;

14. $y = \frac{x^2}{3};\ y = 4 - \frac{2}{3}x^2$;

15. $y = x^2;\ y = \frac{8}{x};\ y = \sqrt{x}$;

16. $y = 2^x;\ y = 2x - x^2;$
$x = 0;\ x = 2$

17. $y = 3 + 2x - x^2;\ y = x + 1;\ y = 0$;

18. $x + y - 4 = 0;\ y = \frac{3}{x};\ x = 0;\ y = 0$;

19. $y = x^2;\ y = \frac{x^2}{2};\ y = 2x$;

20. $y^2 = 1 - x;\ x = -3$.

VIII. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. а) $x^2 dy - (y^2 + 4)dx = 0$,

б) $2xy' - y = 3x^2$;

2. а) $(x - 8)dy - 3y^2 dx = 0$,

б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

3. а) $\sqrt{x + 4}dy - (9y^2 + 1)dx = 0$,

б) $\left(x^2 + 2x + 1\right)y' + \left(x + 1\right)y = x - 1$;

4. а) $\sqrt[3]{x - 3}dy - e^y dx = 0$,

б) $y' = x^2 + 2x - 2y$;

5. а) $y\sqrt{x-5}dy-(4-y^2)dx=0,$

б) $y'-\dfrac{y}{x-2}=e^{2x}(x-2);$

6. а) $\sqrt{x^2+4}dy-2x(6y+1)dx=0,$

б) $2xy'-y=3x^2;$

7. а) $3y^2\sqrt{9-x^2}dy-(y^3-8)dx=0,$

б) $x^2y'+4xy-2=0;$

8. а) $5y\sqrt{x^2+4}dy-(y+1)dx=0,$

б) $y'-2xy=2xe^{x^2};$

9. а) $(3x-4)dy-y^4dx=0,$

б) $y'-y\cos x=\sin 2x;$

10. а) $xy'+2y=2xyy',$

б) $y'+2y=x+1;$

11. а) $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0,$

б) $4xy'-y=x^2;$

12. а) $\sqrt{x^2+4}dy-3x(9y+7)dx=0,$

б) $x^2y'+2xy-1=0$

13. а) $5xydy-(xy^2+4x)dx=0,$

б) $y'-y=e^x;$

14. а) $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0,$

б) $(x^2+1)y'+4xy=3;$

15. а) $y\sqrt{1-4x^2}dy-x(y-3)dx=0,$

б) $y'-\dfrac{y}{x+1}=e^x(x+1);$

16. а) $xyy'=1-x^2,$

б) $(2+x)y'-2y=(2+x)^2;$

17. а) $\sqrt[3]{x^2-3}dy-xe^{y+1}dx=0,$

б) $xy'+y=y^2;$

18. а) $y\sqrt{x-1}dy-(5+y)dx=0,$

б) $y'+y=\dfrac{e^{-x}}{1-x};$

19. а) $(6x+7)dy-8(y-1)^3dx=0,$

б) $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1;$

20. а) $\sqrt{xy}\cdot y'=3-x^2,$

б) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2.$

IX. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

1. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3,\ y'(0) = 9$;

2. $y'' - 6y + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}$;

3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 8$;

4. $y'' + y = \cos 3x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

5. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

6. $y'' + 9y' = 6e^{3x}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

7. $y'' + y = 2\cos x,\ y(0) = 1\ y'(0) = 0$;

8. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;

9. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$;

10. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

11. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3{,}2$;

12. $y'' - 2y' = e^x\left(x^2 + x - 3\right),\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$;

13. $y'' - y' = 2(1 - x),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$;

14. $y'' + y = -\sin 2x,\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 1$;

15. $y'' + 4y = \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$;

16. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$;

17. $y'' - 8y' + 7y = 14,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 5$;

18. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x,\ y(0) = \frac{3}{5},\ y'(0) = \frac{8}{5}$;

19. $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

20. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x},\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$.

Вариант 00

Образцы решения типовых задач контрольной работы

I. Найти указанные пределы

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$;

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{(\sqrt{2+x}-3)(\sqrt{2+x}+3)}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{(\sqrt{2+x})^2-3^2}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+3} = \dfrac{1}{6}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8x-1}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-5x+2}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(8-\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{8-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{8-0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0+0}} = \frac{8}{2} = 4;$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{1-\cos 14x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 5x}{2\sin^2 7x}=\left(\dfrac{5}{7}\right)^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\sin 5x}{5x}\right)^2}{\left(\dfrac{\sin 7x}{7x}\right)^2}=\left(\dfrac{5}{7}\right)^2=\dfrac{25}{49}$.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x+3}+\dfrac{-4}{4x+3}\right)^{3x+2}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{4x+3}\right)^{\frac{4x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{4x+3}\cdot(3x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(3x+2)}{4x+3}}=e^{-3}.$$

II. Дана функция $y=\dfrac{x}{x-1}$. Требуется: а) исследовать непрерывность функции; б) определить род разрыва в точке разрыва; в) сделать эскиз графика функции.

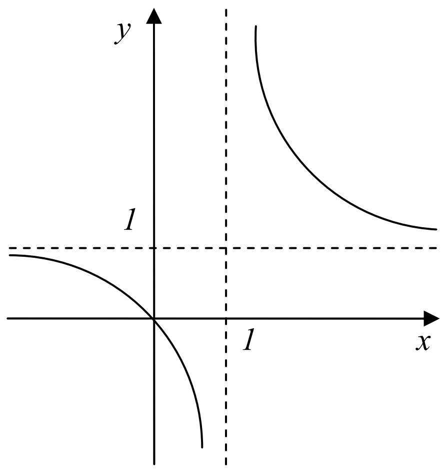

Рисунок 1

Решение.

Данная функция является элементарной. Известно, что всякая элементарная функция непрерывна на своей области определения. Данная функция определена на $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ и, следовательно, непрерывна на этих интервалах. В точке x=1 функция имеет разрыв второго рода, поскольку в этой точке отсутствуют конечные односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{x-1}= \quad =+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{x-1}=-\infty$.

Для уточнения эскиза графика найдем предел функции $y=\dfrac{x}{x-1}$ при $x\to\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x-1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1$.

Эскиз графика функции изображен на рисунке 1.

III. Найти производные функций:

а) $y=\dfrac{7x-1}{\sqrt{x^4+x-4}}$; б) $y=6^{\sin 2x}-tg^2x$; в) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{6-x}{x^2-5x}}$; г) $y=x^{\sin x}$;

д) $x^2+y^2-4xy=0$.

Решение.

а) $$y'=\left(\frac{7x-1}{\sqrt{x^4+x-4}}\right)'=\frac{(7x-1)'\sqrt{x^4+x-4}-(7x-1)\left(\sqrt{x^4+x-4}\right)'}{\left(\sqrt{x^4+x-4}\right)^2}=$$

$$=\frac{7\sqrt{x^4+x-4}-(7x-1)\dfrac{4x^3+1}{2\sqrt{x^4+x-4}}}{\left(\sqrt{x^4+x-4}\right)^2}=\frac{14\left(\sqrt{x^4+x-4}\right)^2-(7x-1)\left(4x^3+1\right)}{2\left(\sqrt{x^4+x-4}\right)\sqrt{x^4+x-4}}=$$

$$=\frac{14x^4+14x-56-28x^4-7x+4x^3+1}{2\sqrt{(x^4+x-4)^3}}=\frac{-14x^4+4x^3+7x-55}{2\sqrt{(x^4+x-4)^3}}.$$

б) $$y'=(6^{\sin 2x}-tg^2x)'=\left(6^{\sin 2x}\right)'-\left(tg^2x\right)'=6^{\sin 2x}\ln 6\cdot(\sin 2x)'-2tg\,x\cdot(tg\,x)'=$$

$$=6^{\sin 2x}\ln 6\cdot 2\cos 2x-2tg\,x\frac{1}{\cos^2 x}=2\cos 2x\cdot 6^{\sin 2x}\ln 6-\frac{2tg\,x}{\cos^2 x}.$$

в) $$y'=\left(\ln\sqrt[4]{\frac{6-x}{x^2-5x}}\right)'=\left(\ln\left(\frac{6-x}{x^2-5x}\right)^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{6-x}{x^2-5x}\right)\right)'=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln(6-x)-\ln\left(x^2-5x\right)\right)'=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6-x}\cdot(6-x)'-\frac{1}{x^2-5x}\cdot\left(x^2-5x\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{6-x}-\frac{2x-5}{x^2-5x}\right)=\frac{-(x^2-5x)-(2x-5)(6-x)}{4(6-x)(x^2-5x)}=\frac{x^2-12x+30}{4(6-x)(x^2-5x)}.$$

г) Для нахождения производной функции $y = x^{\sin x}$ применим логарифмическое дифференцирование.

Логарифмируем данную функцию: $\ln y = \ln x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln x$. Затем дифференцируем обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = (\sin x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x$$

и выражаем y':

$$y' = y\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right).$$

е) Дифференцируем левую и правую часть уравнения $x^2 + y^2 - 4xy = 0$:

$$\left(x^2 + y^2 - 4xy\right)' = 0'$$

$$2x + 2yy' - 4(1y + xy') = 0$$

$$2x + 2yy' - 4y - 4xy' = 0.$$

Выражаем y':

$$y' = \frac{4y - 2x}{2y - 4x} = \frac{2y - x}{y - 2x}.$$

IV. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

Решение.

1) Функция не определена при $x = -2$ и $x = 2$. Значит, $D(f) = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$.

2) $y(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = y(x) -$ функция является четной. Ее график симметричен относительно оси Oy.

3) Вертикальные асимптоты:

$$x = -2, \text{ т.к. } \lim_{x \to -2+0} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^2}{(-2)^2 - 4} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{(-2)^2}{(-2)^2-4}=+\infty .$$

$$x=2\text{, т.к. } \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{2^2}{2^2-2}=+\infty ,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{2^2}{2^2-2}=-\infty .$$

Горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=1 .$$

Значит, $y=1$ – горизонтальная асимптота.

4) Находим экстремумы функции и промежутки ее монотонности.

$$y'=\frac{2x(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-8x}{(x^2-4)^2};$$

$$y'=0,\ \text{если}\ -8x=0\Rightarrow x=0\in D(f);$$

$$y'-\text{не существует, если}\ \ x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2\notin D(f).$$

Таким образом, x=0 – критическая точка.

Определяем знаки первой производной слева и справа от найденной критической точки, учитывая область определения функции, и указываем стрелками соответствующее поведение функции (см. рис. 2).

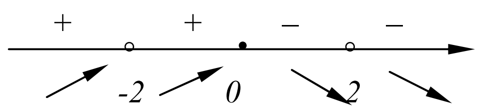

Рисунок 2

Делаем вывод о том, что x=0 – точка максимума, $y_{\max}=y(0)=0$.

5) Находим промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

$$y''=\frac{-8(x^2-4)^2+8x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=\frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3};$$

$$y''\neq 0,\ \text{т.к.}\ \ 24x^2+32\neq 0;$$

$$y''-\text{не существует, если}\ x=\pm 2\notin D(f).$$

Таким образом, точек перегиба график функции не имеет. Определим характер выпуклости графика функции на области определения. Для этого найдем знаки второй производной на промежутках $(-\infty;-2), (-2;2)$ и $(2;+\infty)$ (см. рис. 3).

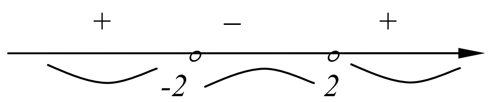

Рисунок 3

Получаем, что график исследуемой функции является выпуклым вниз на промежутках $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$, а выпуклым вверх – на промежутке $(-2;2)$.

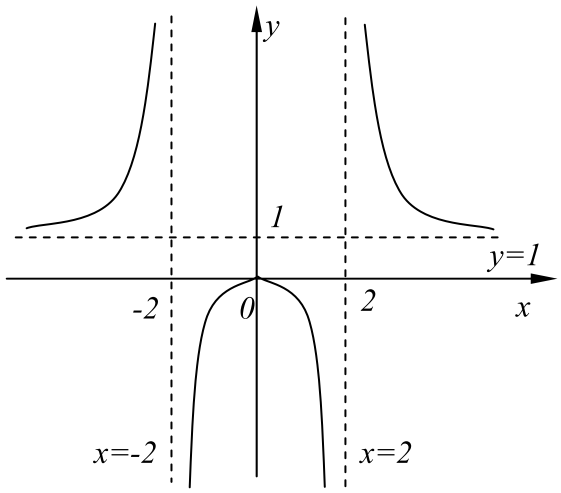

Рисунок 4

6) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

– Если $x = 0$, то $y = 0$. График пересекает ось Oy в точке $O(0;0)$.

– Если $y = 0$, то $x = 0$. График пересекает ось Ox в точке $O(0;0)$.

График функции изображен на рисунке 4.

V. Найти экстремум функции $z = 3xy - x^3 + y^3$.

Решение.

1) Находим критические точки функции, т.е. такие точки $(x; y)$, в которых частные производные функции z'_x и z'_y одновременно равны нулю или хотя бы одна из них не существует.

$$z'_x = 3y - 3x^2;\ z'_y = 3x + 3y^2$$

Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем точки, в которых они равны нулю, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 3y-3x^2=0 \\ 3x+3y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ 3x+3\left(x^2\right)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ 3x+3x^4=0 \end{cases}$$

Решаем второе уравнение системы:

$$3x+3x^4=0$$

$$3x(1+x^3)=0$$

$$x_1=0 \text{ или } 1+x^3=0$$
$$x_2=-1$$

Находим y_1 и y_2, подставляя x_1 и x_2 в первое уравнение системы. Получаем следующие точки: $M_1(0;0), M_2(-1;1)$.

2) Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=-6x,\ z''_{xy}=3,\ z''_{yy}=6y.$$

В точке $M_1(0;0)$ имеем:

$$z''_{xx}(0;0)=0=A,\ z''_{xy}(0;0)=3=B,\ z''_{yy}(0;0)=0=C,$$

тогда $\Delta=AC-B^2=0-3^2=-9$, т.е. $\Delta<0$. Значит, в точке $M_1(0;0)$ экстремума нет.

В точке $M_2(-1;1)$ имеем:

$$z''_{xx}(-1;1)=6=A,\ z''_{xy}(-1;1)=3=B,\ z''_{yy}(-1;1)=6=C,$$

тогда $\Delta=AC-B^2=6\cdot 6-3^2=27$, т.е. $\Delta>0$. Значит, $M_2(-1;1)$ – точка минимума (A=6>0), а $z_{\min}=z(-1;1)=3\cdot(-1)\cdot 1-(-1)^3+1^3=-1$.

VI. Найти указанные неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1) $$\int xe^{x^2-3}dx = \left| \begin{array}{c} t = x^2 - 3 \\ x = \sqrt{t+3} \\ dx = \left(\sqrt{t+3}\right)' dt = \dfrac{dt}{2\sqrt{t+3}} \end{array} \right| = \int \sqrt{t+3}\, e^t \frac{dt}{2\sqrt{t+3}} = \frac{1}{2}\int e^t dt =$$

$$= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2-3} + C.$$

Проверка: $\left(\dfrac{1}{2}e^{x^2-3} + C\right)' = \left(\dfrac{1}{2}e^{x^2-3}\right)' + C' = \dfrac{1}{2}e^{x^2-3} \cdot (x^2-3)' = \dfrac{1}{2}e^{x^2-3} \cdot 2x = xe^{x^2-3}.$

2) $$\int \frac{x^3+4x-1}{(x^3-1)(x-1)}dx = \int \frac{x^3+4x-1}{(x^2+x+1)(x-1)^2}dx$$

Представим дробь $\dfrac{x^3+4x-1}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}$ в виде суммы простейших. Знаменатель этой дроби имеет действительный корень $x=1$ кратности 2 и пару сопряженных комплексных корней, соответствующих многочлену x^2+x+1. Значит,

$$\frac{x^3+4x-1}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+x+1\right)},$$

где $A, B, C, D -$ неопределенные коэффициенты.

Приводим дроби в правой части к общему знаменателю. Из полученного равенства дробей следует равенство их числителей.

$$x^3+4x-1 = A(x-1)\left(x^2+x+1\right) + B\left(x^2+x+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

После раскрытия скобок равенство приобретает вид:

$$x^3+4x-1 = Ax^3 - A + Bx^2 + Bx + B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D,$$

$$x^3+4x-1=(A+C)x^3+\left(B-2C+D\right)x^2+\left(B+C-2D\right)x+\left(-A+B+D\right).$$

Из полученного равенства многочленов следует равенство коэффициентов при одинаковых степенях x:

$$\begin{aligned}&x^3:1=A+C\\&x^2:0=B-2C+D\\&x:\ 4=B+C-2D\\&x^0:-1=-A+B+D\end{aligned}.$$

В результате получаем систему уравнений $\begin{cases}A+C=1\\B-2C+D=0\\B+C-2D=4\\-A+B+D=-1\end{cases}$, решая которую найдем $A=1$; $B=\frac{4}{3}$; $C=0$; $D=-\frac{4}{3}$.

В итоге: $\dfrac{x^3+4x-1}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}=\dfrac{1}{(x-1)}+\dfrac{4/3}{(x-1)^2}+\dfrac{-4/3}{\left(x^2+x+1\right)}$.

После представления правильной рациональной дроби в виде суммы простейших ее интегрирование сводится к нахождению интегралов от этих простейших дробей.

Заменяем подынтегральную дробь суммой простейших.

$$\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{4/3}{(x-1)^2}+\frac{-4/3}{x^2+x+1}\right)dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{4/3}{(x-1)^2}dx+\int\frac{-4/3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\ln|x-1|+\frac{4}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1}-\frac{4}{3}\int\frac{d(x+0{,}5)}{(x+0{,}5)^2+0{,}75}=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{4}{3(x-1)}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{0{,}75}}arctg\frac{(x+0{,}5)}{\sqrt{0{,}75}}+C=$$

$$= \ln|x-1| - \frac{4}{3(x-1)} - \frac{8}{3\sqrt{3}} arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Проверка.

$$\left(\ln|x-1| - \frac{4}{3(x-1)} - \frac{8}{3\sqrt{3}} arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \right)' =$$

$$= (\ln(x-1))' - \frac{4}{3}\left((x-1)^{-1}\right)' - \frac{8}{3\sqrt{3}}\left(arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)' + C' =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{4}{3}(x-1)^{-2} - \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{4}{3(x-1)^2} - \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{3+(2x+1)^2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{4}{3(x-1)^2} - \frac{4}{3(x^2+x+1)} = \frac{3(x-1)(x^2+x+1) + 4(x^2+x+1) - 4(x-1)^2}{3(x-1)^2(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{3x^3+12x-3}{3(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{x^3+4x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

3) $$\int x\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}(C=0) \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x + \frac{x^2}{2}(\ln x)' - \left(\frac{x^2}{4}\right)' + C' =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x\ln x+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\cdot 2x=x\ln x+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}=x\ln x.$$

VII. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-2x+5;\quad -x+y-5=0$.

Решение.

Строим линии, ограничивающие фигуру. Предварительно приведем их уравнения к каноническому виду:

$$y=x^2-2x+5$$

$$y=(x^2-2x+1)-1+5$$

$$y-4=(x-1)^2.$$

Полученное уравнение задает параболу, вершина которой расположена в точке (1;4); осью является прямая x=1; ветви направлены вверх.

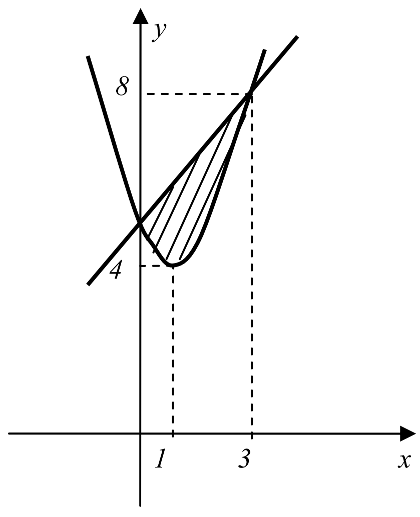

Рисунок 5

Уравнение $-x+y-5=0$ или $y=x+5$ задает прямую.

На рисунке 5 штриховкой выделена криволинейная фигура, площадь которой требуется вычислить.

Для нахождения данной площади с помощью определенного интеграла будем пользоваться формулой

$$S=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx.$$

Чтобы найти пределы интегрирования a и b, нужно найти абсциссы точек пересечения линий $y = x^2 - 2x + 5$ и $-x + y - 5 = 0$, а для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 5 \\ -x + y - 5 = 0 \end{cases}$. Получаем $x_1 = 0,\quad x_2 = 3$. Таким образом, $a = 0,\quad b = 3$.

В качестве функции $g(x)$ рассматриваем ту функцию, график которой ограничивает криволинейную фигуру сверху, а в качестве $f(x)$ – функцию, график которой ограничивает криволинейную фигуру снизу. В нашем случае, $g(x) = x + 5$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

$$S = \int_0^3 \left(x + 5 - (x^2 - 2x + 5)\right)dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2}\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2}\right) = 4{,}5\,(\text{кв.ед.}).$$

VIII. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

а) $(2x-1)y\,dx + (y+3)x\,dy = 0$; б) $y' - y\,\mathrm{ctg}x = \sin x$.

Решение.

а) Разделяем переменные: $(2x-1)y\,dx + (y+3)x\,dy = 0$

$$\frac{y+3}{y}dy = -\frac{(2x-1)}{x}dx.$$

Интегрируем: $$\int\left(1 + \frac{3}{y}\right)dy = -\int\left(2 - \frac{1}{x}\right)dx,$$

$$y + 3\ln|y| = -2x + \ln|x| + C.$$

Упрощаем полученное общее решение:

$$2x + y = \ln|x| - 3\ln|y| + \ln\left|e^C\right|$$

$$2x + y = \ln\left|\frac{C_1 x}{y^3}\right|, \text{ где } C_1 = e^C.$$

б) Это линейное уравнение. Ищем решение в виде:

$$y = u(x)v(x),\ y' = u'v + uv'.$$

Получаем

$$u'v + uv' - uv\,\mathrm{ctg}x = \sin x$$

$$u'v + u(v' - v\,\mathrm{ctg}x) = \sin x. \qquad (1)$$

Так как одну из функций $u(x)$ или $v(x)$ можно выбирать произвольно, то функцию $v(x)$ возьмем такую, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль. Приравниваем его к нулю: $v' - v\,\mathrm{ctg}x = 0$.

Решаем полученное уравнение:

$$v' - v\,\mathrm{ctg}x = 0 \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int \mathrm{ctg}x\,dx \Rightarrow \ln|v| = \ln|\sin x|\ (C = 0) \Rightarrow v = \sin x.$$

Подставляем $v = \sin x$ в (1), получаем:

$$u'\sin x = \sin x\ \Rightarrow \frac{du}{dx}\sin x = \sin x \Rightarrow \int du = \int dx \Rightarrow u = x + C.$$

Общее решение: $y = (x + C)\cdot\sin x$.

IX. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$, $y(0) = 0,\ y'(0) = -\dfrac{16}{25}$.

Решение.

Это дифференциальное уравнение является линейным неоднородным второго порядка со специальной правой частью, поэтому его общее решение имеет вид $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где $\bar{y}$ – общее решение линейного однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному, $\tilde{y}$ – некоторое частное решение данного неоднородного уравнения.

1) Составляем однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному:

$$y'' - 7y' + 6y = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 - 7r + 6 = 0.$$

Находим его корни:

$$r_1 = 6, \quad r_2 = 1.$$

Общее решение:

$$\bar{y} = C_1 e^{6x} + C_2 e^x.$$

2) Сравниваем правую часть исходного уравнения $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ с функцией специального вида $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$, выписываем значения параметров α и β: $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Учитывая эти значения, составляем число $\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1$. Это число совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Значит, частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде $\tilde{y} = xe^{\alpha x}(M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x)$. После подстановки в это равенство $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $M_l(x) = Ax + B$ и $N_l(x) = Cx + D$ получаем

$$\tilde{y} = xe^x((Ax+B)\cos 0x + (Cx+D)\sin 0x)$$

или

$$\tilde{y} = e^x (Ax^2 + Bx).$$

Далее необходимо найти неопределенные коэффициенты A и B.

Поставляем решение $\tilde{y}$ в уравнение $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$, предварительно определив $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$. Получаем

$$\left[\left(Ax^2 + Bx\right) + \left(4Ax + 2B\right) + 2A - 7\left(Ax^2 + Bx\right) - 7\left(2Ax + B\right) + 6\left(Ax^2 + Bx\right)\right]e^x =$$
$$= \left(x-2\right)e^x$$

или

$$\left(-10Ax - 5B + 2A\right)e^x = (x-2)e^x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$x: \quad -10A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{10}$$
$$x^0: \quad -5B + 2A = -2 \Rightarrow B = \frac{9}{25}.$$

Следовательно, частным решением является

$$\tilde{y} = e^x \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + e^x \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Подставляем начальное условие $y(0) = 0$ в общее решение:

$$0 = C_1 e^{6\cdot 0} + C_2 e^0 + e^0 \left(-\frac{1}{10}\cdot 0^2 + \frac{9}{25}\cdot 0\right)$$

или $C_1 + C_2 = 0$.

Дифференцируем общее решение:

$$y' = 6C_1 e^{6x} + C_2 e^x + e^x(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x) + e^x(-\frac{1}{5}x + \frac{9}{25}).$$

Подставляем в это равенство начальное условие $y'(0) = -\frac{16}{25}$:

$$-\frac{16}{25} = 6C_1 e^{6\cdot 0} + C_2 e^0 + e^0(-\frac{1}{10}\cdot 0^2 + \frac{9}{25}\cdot 0) + e^0(-\frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{9}{25})$$

$$-\frac{16}{25} = 6C_1 + C_2 + \frac{9}{25}$$

$$6C_1 + C_2 = -1.$$

Таким образом, константы C_1 и C_2 должны удовлетворять системе

уравнений $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 6C_1 + C_2 = -1 \end{cases}$. Решая систему, получаем $C_1 = -\frac{1}{5}$ и $C_2 = \frac{1}{5}$.

Итак, частное решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = -\frac{16}{25}$, имеет вид

$$y = -\frac{1}{5}e^{6x} + \frac{1}{5}e^x + e^x(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x).$$

Приложение 1

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

ФУНКЦИЯ $y = f(x)$	ПРОИЗВОДНАЯ $y' = f'(x)$
1) $y = C(C - const)$	1) $y' = 0$
2) $y = x^n$	2) $y' = nx^{n-1}$
3) $y = e^x$	3) $y' = e^x$
4) $y = a^x$	4) $y' = a^x \ln a$
5) $y = \ln x$	5) $y' = \frac{1}{x}$
6) $y = \log_a x$	6) $y' = \frac{1}{x \ln a}$
7) $y = \sin x$	7) $y' = \cos x$
8) $y = \cos x$	8) $y' = -\sin x$
9) $y = tgx$	9) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10) $y = ctgx$	10) $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11) $y = \arcsin x$	11) $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
12) $y = \arccos x$	12) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13) $y = arctgx$	13) $y' = \frac{1}{1 + x^2}$
14) $y = arcctgx$	14) $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1) $(U \pm V)' = U' \pm V'$

2) $(UV)' = U'V + UV'$

3) $(CU)' = CU'$

4) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

Приложение 2

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int 0dx = C$

2. $\int dx = x + C$

3. $\int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C_1, \quad a > 0$

Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Литература:

1. Высшая математика для экономистов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.:Юнити-Дана, 2010. – 480с.
2. Высшая математика для экономистов. Практикум / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.:Юнити-Дана, 2010. – 480с.
3. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – Спб.: Лань, 2010. – 464 с.
4. Малугин В.А. Математика для экономистов. Математический анализ. – М.: Эксмо, 2006. – 272с.
5. Математика в экономике: учебник в 3 ч. Часть 2. Математический анализ / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, И. Г. Шандра. – М.: Финансы и статистика, Инфра-М, 2011. – 560 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 1. – СПб.: Лань, 2008. – 448 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 2. – СПб.: Лань, 2008. – 464 с.
8. Черник О.В. Высшая математика. Часть 1. – Киров: Вятская ГСХА, 2009. – 72с.
9. Черник О.В. Высшая математика. Часть 2. – Киров: Вятская ГСХА, 2010. – 63с.